有限要素スキ-ムの開発と解析 : 流体問題の数値解析から (微分方程式の数値解法と線形計算)

田端, 正久

数理解析研究所講究録 1320 巻 2003 年 7-17

有限要素スキームの開発と解析
– 流体問題の数値解析から

九州大学大学院数理学研究院　田端正久 (Masahisa Tabata) *
Faculty of Mathematics, Kyushu University

1　はじめに

偏微分方程式を現実的に解く最良の方法は計算機を使った数値解法である．与えられた偏微分方程式を計算機で解くためには，数値計算スキームを作成しなければならない．信頼できる計算結果を得るには，収束性の保証された数値計算スキームを開発する必要がある．偏微分方程式の数値解法には，差分法，有限要素法，スペクトル法などがあるが，汎用性があり，多様なスキームの作成が可能であり，偏微分方程式の理論結果を自然に取り込むことができるなどの特長を持っている有限要素法について考える．以下では，流体問題を例にとり最近の結果を交えて，有限要素スキームの開発とその解析について述べる．

- 偏微分方程式の一意可解性と離散問題の安定性不等式．安定性不等式は離散問題の一意可解性を保証するだけでなく，解の収束性を示す上で本質的な役割を果たす．安定性不等式を示すためには，連続問題のノルムと異なるノルムを使わなければならない場合もある．移流が支配的な移流拡散問題などに現れる安定化有限要素法はその一例である．

- 非定常問題における安定性と離散 Gronwall の不等式．非定常問題の安定性は離散 Gronwall の不等式によって示される．連続問題の Gronwall の不等式だけでは不十分で，時間方向に安定化させる項がしばしば有用になる．

- 非線形項の取り扱い．Navier-Stokes 方程式には，$(u\cdot\nabla)u$ の非線形項がある．離散問題の L^2-安定性にはこの項の取り扱いは難しくないが，誤差評価のためにはこの項から生じる 3 重一次形式の評価に工夫がいる．成功している評価の原理を解析する．

本稿で，Ω は $\mathbf{R}^d$ の有界領域 $(d=1,2,3)$，その境界 $\partial\Omega$ は区分的に滑らかであるとする．通常，有限要素法では Ω を領域 Ω_h で近似する．この近似から生じる誤差は評価できるので [1]，とくに Ω と Ω_h の違いについて言及しない．T は時刻を表すある正数である．c は細分パラメータに依存しない正定数である．$\|\cdot\|_0$ は $L^2(\Omega)$-ノルムである．

*Email: tabata@math.kyushu-u.ac.jp

2　定常移流拡散問題

2.1　安定性不等式

X をヒルベルト空間，X' をその双対空間とする．連続線形作用素 $A : X \to X'$ と $f \in X'$ が与えられている．

問題 1　X' での方程式

$$Au = f \tag{1}$$

を満たす $u \in X$ を求めよ．

X と X' の双対積を $\langle \cdot, \cdot \rangle$ で表す．双一次形式 $a : X \times X \to \mathbf{R}$ を

$$a(u, v) := \langle Au, v \rangle$$

で定義すると，a は X 上で連続になり，問題 1 は次の問題 1' と同値である．

問題 1'

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle \qquad (\forall v \in X) \tag{2}$$

を満たす $u \in X$ を求めよ．

問題 1 の可解性と解の一意性に関して，次の定理が成立する．

定理 1 (i), (ii), (iii) は同値である．

(i)

$$A \in \mathrm{Isom}(X, X')$$

(ii) ある正数 α_0 が存在して，

$$||Au||_{X'} \geq \alpha_0 ||u||_X \quad (\forall u \in X), \qquad ||A'v||_{X'} \geq \alpha_0 ||v||_X \quad (\forall v \in X)$$

が成立する．

(iii)

$$\inf_{u \in X} \sup_{v \in X} \frac{a(u, v)}{||u||_X ||v||_X} > 0, \qquad \inf_{v \in X} \sup_{u \in X} \frac{a(u, v)}{||u||_X ||v||_X} > 0 \tag{3}$$

が成立する．

注意 1 a が強圧的

$$\inf_{u \in X} \frac{a(u, u)}{||u||_X^2} > 0 \tag{4}$$

であれば，(3) が成立するので，問題 1 は一意可解である．これは，Lax-Milgram の定理 [2] に他ならない．

有限次元近似問題の列を考える．X_h を X を近似する有限次元空間[1]，X'_h を X_h の双対空間とする．$A_h : X_h \to X'_h$ を A を近似する線形作用素，$f_h \in X'_h$ は f の近似とする．$h(>0)$ は列を表すパラメータである．有限要素法の場合，h は最大要素長であり $h \downarrow 0$ とする．

問題 1h X'_h での方程式

$$A_h u_h = f_h \tag{5}$$

を満たす $u_h \in X_h$ を求めよ．

X_h と X'_h の双対積を前と同じ記号 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ で表す．双一次形式 $a_h : X_x \times X_h \to \mathbf{R}$ を

$$a_h(u_h, v_h) := \langle A_h u_h, v_h \rangle$$

で定義すると，a_h は X_h 上で連続になり，問題 1h は次の問題 1'h と同値である．

問題 1'h

$$a(u_h, v_h) = \langle f_h, v_h \rangle \qquad (\forall v_h \in X_h) \tag{6}$$

を満たす $u_h \in X_h$ を求めよ．

定義 1 h に依存しないある正数 α があり，

$$\inf_{u_h \in X_h} \sup_{v_h \in X_h} \frac{a_h(u_h, v_h)}{||u_h||_{X_h} ||v_h||_{X_h}} \geq \alpha \tag{7}$$

が成立するとき，A_h は安定性不等式を満たすという．(7) は

$$||A_h u_h||_{X'_h} \geq \alpha ||u_h||_{X_h} \quad (\forall u_h \in X_h) \tag{8}$$

と同じである．

A_h が安定性不等式を満たせば，問題 1h，あるいは問題 1'h は定理 1 により，一意可解である[2]．(3) の第 2 式は，X_h が有限次元なので (7) から従うからである．

適合有限要素法 (conforming FEM) の場合を考えよう．すなわち，

$$X_h \subset X, \quad A_h := A|_{X_h}, \quad f_h := f|_{X_h}, \quad ||\cdot||_{X_h} := ||\cdot||_X \tag{9}$$

である．このとき，次の結果が得られる [3]．

定理 2 X をヒルベルト空間，$A : X \to X'$ は連続線形作用素で，(3) を満たしているとする．$f \in X'$ が与えられている．近似空間列 X_h は X の有限次元部分空間であり，A_h，f_h は (9) として定める．A_h は安定性不等式を満たしているとする．u を問題 1 の解，u_h を問題 1h の解とすると，

$$||u - u_h||_X \leq \left(1 + \frac{||A||_{X \to X'}}{\alpha}\right) \inf_{v_h \in X_h} ||u - v_h||_X \tag{10}$$

[1] X_h は X の部分空間でなくてもよい．

[2] 一意可解性のためだけなら (7) の左辺が正であることだけで十分である．

が成立する．

系 1 X をヒルベルト空間，$A: X \to X'$ は連続線形作用素で，(4) を満たしているとする．$f \in X'$ が与えられている．近似空間列 X_h は X の有限次元部分空間であり，A_h, f_h は (9) として定める．u を問題 1 の解，u_h を問題 1h の解とすると，

$$||u - u_h||_X \leq \frac{||A||_{X \to X'}}{\alpha} \inf_{v_h \in X_h} ||u - v_h||_X$$

が成立する．

2.2 ガレルキン有限要素法

まず，Poisson 方程式

$$-\Delta\phi = f \quad (x \in \Omega), \qquad \phi = 0 \quad (x \in \partial\Omega) \tag{11}$$

を考えよう．

$$X = H_0^1(\Omega), \quad ||\phi||_X = ||\nabla\phi||_0, \quad A = -\Delta$$

とすると，$\alpha = ||A|| = 1$ となる．ϕ_h を適合有限要素法による解とする．系 1 の結果を適用することができて，

$$||\phi - \phi_h||_X \leq \inf_{\psi_h \in X_h} ||\phi - \psi_h||_X$$

が得られる．有限要素解は近似空間 X_h で最良近似されていることが分かる．

次に，移流拡散方程式

$$-\nu\Delta\phi + u \cdot \nabla\phi = f \quad (x \in \Omega), \qquad \phi = 0 \quad (x \in \partial\Omega) \tag{12}$$

を考えよう．ここに，ν は拡散係数，$u : \Omega \to \mathbf{R}^d$ は既知の流速であり，$\nabla \cdot u = 0$ を満たしているとする．

$$X = H_0^1(\Omega), \quad ||\phi||_X = ||\nabla\phi||_0, \quad A = -\nu\Delta + u \cdot \nabla$$

と置く．A は X で強圧的であり，

$$\nu||\phi||_X \leq ||A\phi||_{X'} \leq \left(\nu + c||u||_{L^3(\Omega)}\right) ||\phi||_X \tag{13}$$

となる．適合要素を用いるガレルキン有限要素近似: $\phi_h \in X_h$ で，X_h' での方程式

$$A_{0h}\phi_h + A_{1h}(u)\phi_h = i_h' f \tag{14}$$

を満たすものを求める問題を考える．ここに，

$$\langle A_{0h}\phi_h, \psi_h\rangle = \nu \int_\Omega \nabla\phi_h \cdot \nabla\psi_h dx, \quad \langle A_{1h}(u)\phi_h, \psi_h\rangle = \int_\Omega (u \cdot \nabla\phi_h)\psi_h dx \tag{15}$$

であり，$i_h : X_h \to L^2(\Omega)$ は恒等作用素，i'_h はその双対作用素である．系1を適用すると，(13) から

$$||\phi - \phi_h||_X \leq \left(1 + \frac{c}{\nu}||u||_{L^3(\Omega)}\right) \inf_{\psi_h \in X_h} ||\phi - \psi_h||_X \tag{16}$$

が得られる．評価 (16) は $||u||_{L^3(\Omega)}/\nu$ が大きくないとき有用であるが，$\nu \downarrow 0$ のとき，右辺の係数は $u \neq 0$ でない限り無限大になり，良い結果ではない．実際，有限要素近似 (14) の解は，セルペクレ数 $P_c(\equiv h|u|/\nu)$ が大きくなると激しく振動することが知られている [4].

2.3 安定化有限要素法

安定化有限要素法は Hughes[5] や，Johnson[6] らによって開発，解析された．安定化有限要素法では，(10) 式右辺の係数が大きくならないようにする．定理2に対応して次のように述べることができる．証明は定理2と同じ指針でできる．

定理 3 X をヒルベルト空間，$A : X \to X'$ は連続線形作用素で，(3) を満たしているとする．$f \in X'$ が与えられており，$u \in X$ を (1) の解とする．X_h を有限次元空間列とし，$f_h \in X'_h$ が与えられている．$Y_h \equiv X_h + \{u\}$ と置く．ノルム $||\cdot||_{X_h}$ は Y_h の元に対して定義されており，線形作用素 $A_h : Y_h \to X'_h$ は安定性不等式 (8) を満たしている．問題 1h の解を u_h とする．X'_h で

$$A_h u = f_h \tag{17}$$

が成り立っているとする．このとき，

$$||u - u_h||_{X_h} \leq \inf_{v_h \in X_h} \left(||u - v_h||_{X_h} + \frac{||A_h||_{Y_h \to X'_h}}{\alpha}||u - v_h||_{Y_h}\right) \tag{18}$$

が成立する．

移流拡散方程式 (12) の安定化有限要素近似を考えよう．X_h は $X \equiv H^1_0(\Omega)$ の有限次元部分空間とする．A_h, f_h を

$$\langle A_h\phi_h, \psi_h\rangle = \langle A_{0h}\phi_h + A_{1h}(u)\phi_h, \psi_h\rangle + \sum_K \tau_K \left(u \cdot \nabla\phi_h - \nu\Delta\phi_h, u \cdot \nabla\psi_h\right)_K, \tag{19}$$

$$\langle f_h, \psi_h\rangle = \langle f, \psi_h\rangle + \sum_K \tau_K \left(f, u \cdot \nabla\psi_h\right)_K \tag{20}$$

で定義する．ここに，$(\cdot,\cdot)_K$ は要素 K 上での積分を意味し，安定化パラメータ τ_K は

$$\tau_K = \frac{1}{c_0^2}\min\left(\frac{h_K^2}{\nu}, \frac{h_K}{|u_K|}\right), \quad ||\Delta\psi_h||_{L^2(K)} \leq \frac{c_0}{h_K}||\nabla\psi_h||_{L^2(K)}$$

ととる．X_h, Y_h のノルムを

$$||\phi_h||_{X_h} = ||\sqrt{\nu}\nabla\phi_h||_0 + ||\sqrt{\tau}u \cdot \nabla\phi_h||_0,$$
$$||\phi_h||_{Y_h} = ||\phi_h||_{X_h} + ||\frac{1}{\sqrt{\tau}}\phi_h||_0 + \nu||\sqrt{\tau}\Delta\phi_h||_{0,h}$$

とする．ここに，

$$\|\sqrt{\tau}u\cdot\nabla\phi_h\|_0 = \left\{\sum_K \tau_K\|u\cdot\nabla\phi_h\|^2_{L^2(K)}\right\}^{1/2},$$

$$\|\sqrt{\tau}\Delta\phi_h\|_{0,h} = \left\{\sum_K \tau_K\|\Delta\phi_h\|^2_{L^2(K)}\right\}^{1/2}$$

である．このとき，

$$\frac{1}{2}\|\phi_h\|_{X_h} \le \|A_h\phi_h\|_{X'_h} \le c\|\phi_h\|_{Y_h}$$

を示すことができる．ここに，正定数cはν, hに依存しない．したがって，定理3により次の評価が得られる．

定理4 ϕ_hを (17), (19), (20) の解とすると，

$$\|\sqrt{\nu}\nabla(\phi-\phi_h)\|_0 + \|\sqrt{\tau}u\cdot\nabla(\phi-\phi_h)\|_0 \le c\inf_{\psi_h\in X_h}\|\phi-\psi_h\|_{Y_h} \tag{21}$$

が成立する．

評価 (21) は，$\nu\downarrow 0$のとき

$$\|u\cdot\nabla(\phi-\phi_h)\|_0 \le c\inf_{\psi_h\in X_h}\|u\cdot\nabla(\phi-\psi_h)\|_0,$$

$\nu\to\infty$のとき

$$\|\nabla(\phi-\phi_h)\|_0 \le c\inf_{\psi_h\in X_h}\left(\|\nabla(\phi-\psi_h)\|_0 + h^{-1}\|\phi-\psi_h\|_0 + h\|\Delta(\phi-\psi_h)\|_0\right)$$

となり，最良の評価であることが分かる．スキーム (20) は P_1 要素を使うと，

$$\langle A_h\phi_h,\psi_h\rangle = \langle A_{0h}\phi_h + A_{1h}(u)\phi_h,\psi_h\rangle + \sum_K \tau_K\left(u\cdot\nabla\phi_h, u\cdot\nabla\psi_h\right)_K$$

となり，SUPG(stream upwind Petrov/Galerkin) 法になる [5].

3 非定常移流拡散問題

3.1 エネルギー不等式

$Q_T = \Omega\times(0,T)$ とおく．非定常移流拡散方程式

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + u\cdot\nabla\phi - \nu\Delta\phi = f \quad ((x,t)\in Q_T) \tag{22}$$

を境界条件，初期条件

$$\phi = 0 \quad (x\in\partial\Omega, t\in(0,T)), \qquad \phi=\phi^0 \quad (x\in\Omega, t=0) \tag{23}$$

のもとで考える．ここに，ν は拡散係数，$u : Q_T \to \mathbf{R}^d$ は既知流速で $\nabla \cdot u = 0$ であり，$f : Q_T \to \mathbf{R}$ は既知外力，$\phi^0 : \Omega \to \mathbf{R}$ は既知関数である．(22) の両辺に ϕ をかけて Ω で積分し，Gronwall の不等式を使うと，エネルギー不等式

$$||\phi||_{L^\infty(L^2)\cap L^2(H^1)} \leq ||\phi^0||_0 + c||f||_{L^2(L^2)} \tag{24}$$

が得られる．ここに，$L^\infty(L^2)$ などは $L^\infty((0,T), L^2(\Omega))$ などの略記である．非定常問題の有限要素解析では，(24) に対応する離散エネルギー不等式を用いる．そのとき，時間方向の離散化に対応して，離散 Gronwall の不等式が使われる．時間方向の離散化にはいくつかの方法があるが，以下では，特性曲線に基づく離散化を考えることにする．議論を簡潔にするために，境界で $u = 0$ を仮定する．

3.2 特性有限要素法

移流拡散方程式 (22) の左辺第 1 項と第 2 項の和は物質微分項と呼ばれ

$$\frac{D\phi}{Dt} \equiv \frac{\partial\phi}{\partial t} + u \cdot \nabla\phi = \frac{d}{dt}\phi(X(t), t)$$

と書ける．ここに，$X : (0,T) \to \mathbf{R}^d$ は常微分方程式系

$$\frac{dX}{dt} = u(X, t) \quad (t \in (0,T)) \tag{25}$$

の解である．

Δt を時間刻み，$N_T \equiv [T/\Delta t]$ とおく．V_h を $H_0^1(\Omega)$ の有限次元部分空間とする．時間方向 1 次精度の特性有限要素スキームは，$\phi_h^{n+1} \in V_h$, $n = 0, \cdots, N_T - 1$ を，

$$\left(\frac{\phi_h^{n+1} - \phi_h^n \circ X_1^n}{\Delta t}, \psi_h\right) + \nu(\nabla\phi_h^{n+1}, \nabla\psi_h) = (f^{n+1}, \psi_h) \quad (\psi_h \in V_h) \tag{26}$$

で求める．ここに，

$$X_1^n(x) = x - u^n(x)\Delta t \tag{27}$$

であり，$\circ$ は関数の合成を意味する．初期値は Π_h を V_h への補間作用素として

$$\phi_h^0 = \Pi_h \phi^0 \tag{28}$$

とする．

定理 5 V_h として，P_k-適合有限要素空間 $(k \geq 1)$ を使う．ϕ_h を (26), (28) の解，ϕ を (22), (23) の解とする．このとき，

$$||\phi_h - \phi||_{\ell^\infty(L^2)},\ ||\sqrt{\nu}\nabla(\phi_h - \phi)||_{\ell^2(L^2)} \leq c(\Delta t + h^k)$$

が成立する．ここに，

$$||\phi_h||_{\ell^\infty(L^2)} = \max\left\{||\phi_h^n||_0; n = 0, \cdots, N_T\right\}, \quad ||\phi_h||_{\ell^2(L^2)} = \left\{\Delta t \sum_{n=0}^{N_T} ||\phi_h^n||_0^2\right\}^{1/2}$$

証明には離散 Gronwall の不等式を用いる [7].

最近，時間方向 2 次精度の特性有限要素スキームが作成された [8]．そのスキームは，$\phi_h^{n+1} \in V_h$, $n = 0, \cdots, N_T - 1$ を，

$$\begin{aligned}&(\frac{\phi_h^{n+1} - \phi_h^n \circ X_2^n}{\Delta t}, \psi_h) + \frac{\nu}{2}(\nabla\phi_h^{n+1} + \nabla\phi_h^n \circ X_1^n, \nabla\psi_h) + \frac{\nu\Delta t}{2}(J^n\nabla\phi_h^n \circ X_1^n, \nabla\psi_h)\\&= \frac{1}{2}(f^{n+1} + f_h^n \circ X_1^n, \psi_h) \quad (\psi_h \in V_h)\end{aligned} \tag{29}$$

で求める．ここに，

$$\begin{aligned}X_2^n(x) &= x - u^{n+1/2}(x - u^n(x)\Delta t/2)\Delta t\\ [J^n]_{ij} &= \frac{\partial u_j^n}{\partial x_j}\end{aligned} \tag{30}$$

であり，初期条件は (28) である．

注意 2 (27) は常微分方程式 (25) の Euler 近似であり，(30) は 2 次 Runge-Kutta 近似である．したがって，物質微分項は Δt に関して 2 次の近似になる．他の項に Crank-Nicolson 近似を用いればそれらの項も 2 次の近似になるが，評価する場所が異なっている．真の 2 次精度近似スキームを導くためには，Jacobi 行列を含む補正項が必要である．

定理 6 [8] V_h として，P_k-適合有限要素空間 ($k \geq 1$) を使う．ϕ_h を (29), (28) の解，ϕ を (22), (23) の解とする．このとき，

$$||\phi_h - \phi||_{\ell^\infty(L^2)},\ ||\sqrt{\nu}\nabla(\phi_h - \phi)||'_{\ell^2(L^2)} \leq c(\Delta t^2 + h^k)$$

が成立する．ここに，

$$||\phi_h||'_{\ell^2(L^2)} = \left\{\Delta t \sum_{n=0}^{N_T} ||\frac{\phi_h^n + \phi_h^n \circ X_1^n}{2}||_0^2\right\}^{1/2}$$

である．

4 非圧縮粘性流体問題

4.1 Navier-Stokes 方程式

非圧縮粘性流体問題を考える．流速 $u : Q_T \to \mathbf{R}^d$，圧力 $p : Q_T \to \mathbf{R}$ を未知関数とする Navier-Stokes 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u - \nu\Delta u + \nabla p = f \quad ((x,t) \in Q_T) \tag{31}$$

$$\nabla \cdot u = 0 \quad ((x,t) \in Q_T) \tag{32}$$

を境界条件，初期条件

$$u = 0 \quad (x \in \partial\Omega, t \in (0,T)), \qquad u = u^0 \quad (x \in \Omega, t = 0) \tag{33}$$

の下で解く．V_h を $H_0^1(\Omega)^d$ の有限次元部分空間，Q_h を $L_0^2(\Omega) \equiv \{q \in L^2(\Omega); (q,1) = 0\}$ の有限次元部分空間とする．後退 Euler 有限要素近似は $(u_h^{n+1}, p_h^{n+1}) \in V_h \times Q_h$，$n = 0, \cdots, N_T - 1$ を

$$(D_{\Delta t}u_h^n, v_h) + a_1(u_h^n, u_h^{n+1}, v_h) + a_0(u_h^{n+1}, v_h) + b(v_h, p_h^{n+1}) = (f^{n+1}, v_h) \quad (\forall v_h \in V_h) \tag{34}$$

$$b(u_h^{n+1}, q_h) = 0 \quad (\forall q_h \in Q_h) \tag{35}$$

で求める．ここに

$$D_{\Delta t}u_h^n = \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t}, \quad D_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right),$$

$$a_0(u,v) = 2\nu \sum_{i,j=1}^{d} \int_\Omega D_{ij}(u)D_{ij}(v)dx, \quad b(v,q) = -\int_\Omega q\nabla\cdot v dz,$$

$$a_1(w,u,v) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\int_\Omega \{(w\cdot\nabla u_i)v_i - (w\cdot\nabla v_i)u_i\}dx \tag{36}$$

であり，初期条件は

$$u_h^0 = \Pi_h u^0$$

とする．

定理 7 要素分割列は正則 [2] であり，V_h, Q_h は下限・上限条件 [9] を満たしており，ある自然数 k があり，各要素上で V_h は k 次多項式を，Q_h は $k-1$ 次多項式を含んでいるとする．スキーム (34), (35) は無条件安定であり，その解 (u_h, p_h) に対して誤差評価

$$||u_h - u||_{\ell^\infty(L^2)\cap\ell^2(H^1)}, \; \sqrt{\Delta t}||D_{\Delta t}(u_h - u)||_{\ell^2(L^2)} \le c(\Delta t + h^k) \tag{37}$$

$$||u_h - u||_{\ell^\infty(H^1)}, \; ||D_{\Delta t}(u_h - u)||_{\ell^2(L^2)} \le c(\Delta t + h^k) \tag{38}$$

$$||p_h - p||_{\ell^2(L^2)} \le c(\Delta t + h^k) \tag{39}$$

が成立する．

4.2 証明の方針

非線形項を評価するのに，次の補題が有用である．

補題 1 3 重一次形式

$$a_1 : (W^{1,3}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega))^d \times H^1(\Omega)^d \times L^2(\Omega)^d \to \mathbf{R}$$

は連続である．

補題 2 Stokes 射影

$$\Pi_h^S : H^2(\Omega)^d \times H^1(\Omega) \to V_h \times Q_h$$

の第 1 成分は, $(W^{1,3}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega))^d$ への連続作用素である.

これらの補題は Sobolev の補題と Stokes 方程式の有限要素近似理論を使って証明できる [10].

定理 7 の証明はまず, (37) の評価を得る. 左辺第 2 項は後退 Euler 法からでる付随的な評価で時間方向に解を安定化させる効果がある. この項が (38) を導く鍵となる. 一般化した離散 Gronwall の不等式を使って評価 (38) が得られる. 詳細については [11] を参照していただきたい.

参考文献

[1] M. Tabata. Uniform solvability of finite element solutions in approximate domains. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, Vol. 18, pp. 567–585, 2001.

[2] P. G. Ciarlet. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. SIAM, New York, 2002.

[3] 田端正久. 微分方程式の数値解法 II. 岩波書店, 東京, 1994.

[4] M. Tabata. A theoretical and computational study of upwind-type finite element methods. In T. Nishida, M. Mimura, and H. Fujii, editors, *Patterns and Waves*, pp. 319–356. Kinokuniya/North-Holland, Tokyo, 1986.

[5] T. J. R. Hughes, L. P. Franca, and G. M. Hulbert. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VIII. the Galerkin/least-square method for advective-diffusive equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 73, pp. 173–189, 1989.

[6] C. Johnson. *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987.

[7] O. Pironneau. *Finite Element Methods for Fluids.* John Wiley & Sons, Chichester, 1989.

[8] H. Rui and M. Tabata. A second order characteristic finite element scheme for convection-diffusion problems. *Numerische Mathematik*, Vol. 92, pp. 161–177, 2002.

[9] V. Girault and P. A. Raviart. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations, Theory and Algorithms.* Springer, Berlin, 1986. Springer Series in Computational Mathematics, Vol. 5.

[10] J. L. Guermond and L. Quartapelle. On the approximation of the unsteady Navier-Stokes equations by finite element projection methods. *Numerische Mathematik*, Vol. 80, pp. 207–238, 1998.

[11] M. Tabata and D. Tagami. Error estimates for finite element approximations of drag and lift in nonstationary Navier-Stokes flows. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, Vol. 17, pp. 371–389, 2000.